動態的 DEA モデル

瀬　見　　博

要　旨

伝統的な DEA モデルは、ある特定の 1 期間の効率性を静態的に測定することはできるが、相互に関連するいくつかの期間を動態的に考察しなければならない場合の効率性については的確に評価することができない。かかる問題を解決するために、従来から数多くの動態的 DEA モデルが開発されてきたが、それらの中でも、近年、特に全体効率性と期間効率性を同時にしかも整合性を保ちつつ取り扱うことができる有用なモデルが、Kao と Tone and Tsutsui により提唱された。そこで本稿では、この 2 種類のモデルを取りあげ、それらがどのような手法であるのかを概説しつつ比較・検討する。

キーワード：包絡分析法（data envelopment analysis, DEA）、動態的 DEA モデル（dynamic DEA model）、連結変数（link variables）、比率型・非比率型 DEA モデル（radial, non-radial DEA model）、期間効率性・全体効率性（term efficiencies, overall efficiency）

I　序

組織の成果(効率性)を数理的に分析・評価するために、従来から主として 2 つの方法が提案されてきた。1 つは計量経済学の分野で発展してきた SFA（stochastic frontier analysis）などに代表されるパラメトリックな方法であり、もう 1 つは数理計画法の領域で展開されてきた DEA（data envelopment analysis）と呼ばれるノンパラメトリックな方法である。これら 2 つの手法の主な違いは、前者が生産可能集合の構造とデータの発生過程に関して、

かなり多くの前提を設け、その結果、それらがある程度先験的に既知であると想定しているのに対して、後者では、生産可能集合の構造もインプット項目・アウトプット項目の加重値も予め規定しておく必要がなく未知であると仮定している点にある。したがって、実用的な観点からすれば、データ指向性がより強い DEA の方が、取り扱いが簡単で利用しやすいことがわかる。

さて、DEA は多種類のインプットを投入して多種類のアウトプットを産出する、同種の活動を行っている事業体群のそれぞれの相対的効率性を評価・測定するための数理計画手法として、1978年に Charnes, Cooper, Rhodes により考案された[1)]。その後、DEAは理論面で一層の精緻化が図られるとともに、応用面でもさまざまな分野に適用され、その有用性が認められてきた[2)]。

ところで、伝統的な DEA モデルは、ある特定の 1 期間の効率性を静態的に測定することはできるが、相互に関連するいくつかの期間を同時に考察しなければならない場合の効率性については的確に評価することができない。ある期間の行動が将来の期間の効率性に影響を及ぼすといった動態的生産システムを分析しなければならない状況下では、連続する複数期間の相互関係を考慮しながら、システム全体の効率性と期間ごとの効率性を同一モデルの中で同時に測定することが求められる。

こうした問題を解決するために、従来から、Färe and Grosskopf[3)] を先駆者とする数多くの動態的 DEA モデル（dynamic DEA model）に関する研究が行われてきたが、それらの中でも、近年、特に全体効率性と期間効率性を同時にしかも整合性を保ちつつ取り扱うことができる有用なモデルが、Kao と

1）　Charnes, A., Cooper, W. W., Rhodes, E.（1978）, Measuring the efficiency of decision making units, *European Journal of Operational Research,* 2, pp. 429–444.

2）　例えば、Cook, W. D., Seiford, L. M.（2009）, Data envelopment analysis（DEA）-Thirty years on, *European Journal of Operational Research,* 192, pp. 1–17. や Emrouznejad, A., Parker, B. R., Tavares, G.（2008）, Evaluation of research in efficiency and productivity : A survey and analysis of the first 30 years of scholarly literature in DEA, *Socio-Economic Planning Sciences,* 42, pp. 151–157 を参照されたい。

3）　Färe, R., Grosskopf, S.（1996）, *Intertemporal Production Frontiers : With Dynamic DEA,* Kluwer Academic Publishers., Färe, R., Grosskopf, S.（2000）, Network DEA, *Socio-Economic Planning Sciences,* 34, pp. 35–49.

Tone and Tsutsui により提唱された。そこで本稿において、この 2 つのモデル、すなわち、Kao の関係性 DEA モデル（dynamic relational model）[4] と Tone and Tsutsui の DSBM モデル（dynamic slacks-based measure model）[5] を取りあげ、それらがどのような手法であるのかを概説しつつ比較・検討してみることにする。

Ⅱ　関係性 DEA モデル

まず、従来の伝統的な DEA モデル、その中でも規模の収穫一定（constant returns to scale）を仮定した最も基本的な CCR モデルを提示しておくことにする。

いま、図 1 で示されるように、同種の活動を行っている各事業体 DMU_j（$j=1, \ldots, n$）が、i 番目のインプット要因を X_{ij} 単位（$i=1, \ldots, m$）投入することによって r 番目のアウトプット要因を Y_{rj} 単位（$r=1, \ldots, s$）産出しているものとしよう。この時、ある特定の事業体 DMU_k の相対的効率性 $\mathrm{E}_k^{\mathrm{CCR}}$ を測定するための乗数形式のインプット指向型 CCR モデルは[6]、

$$\mathrm{E}_k^{\mathrm{CCR}}=\mathrm{Max} \quad \textstyle\sum_{r=1}^{s} u_r Y_{rk} \tag{1a}$$

$$\text{s. t.} \quad \textstyle\sum_{i=1}^{m} v_i X_{ik}=1 \tag{1b}$$

$$\textstyle\sum_{r=1}^{s} u_r Y_{rj}-\sum_{i=1}^{m} v_i X_{ij} \leq 0 \quad (j=1, \ldots, n) \tag{1c}$$

$$u_r,\ v_i \geq \varepsilon \quad (r=1, \ldots, s;\ i=1, \ldots, m) \tag{1d}$$

と定式化できることが知られている。ここに、u_r と v_i は、それぞれ、r 番目

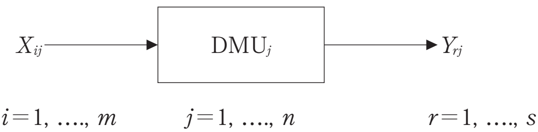
4）Kao, C.（2013）, Dynamic data envelopment analysis: A relational analysis, *European Journal of Operational Research,* 227, pp. 325-330.

5）Tone, K., Tsutsui, M.（2010）, Dynamic DEA: A slacks-based measure approach, *Omega,* 38, pp. 145-156.

6）インプット指向型モデルとは、アウトプット値を現在の水準にしたままでインプット値を一律にどれだけ削減できるかを指向したモデルである。それに対して、アウトプット指向型モデルとは、インプット値を現在の水準にしたままでアウトプット値を一律にどれだけ増加できるかを指向したモデルである。なお、本節で想定しているモデルは、インプット値・アウトプット値を比率的に変化させるので比率型モデルと称される。

のアウトプット値と i 番目のインプット値に関する乗数（加重値）である。また、(1d)の ε は非常に小さな正数を意味する非アルキメデス無限小定数で、効率性を測定する際にインプット要因とアウトプット要因のすべてが評価の対象になることを保証してくれる[7]。

図１．静態的生産システム



さらに、モデル（1a)～(1d）の双対形は、包絡形式のインプット指向型CCR モデルと呼ばれており、θ と $\lambda_j (j=1, \ldots, n)$ を双対変数とすれば、

$$\mathrm{E}_k^{\mathrm{CCR}} = \mathrm{Min} \quad \theta - \varepsilon\left(\textstyle\sum_{i=1}^{m} s_i^- + \sum_{r=1}^{s} s_r^+\right) \tag{2a}$$

$$\text{s. t.} \quad \textstyle\sum_{j=1}^{n} \lambda_j X_{ij} + s_i^- = \theta X_{ik} \ (i=1, \ldots, m) \tag{2b}$$

$$\textstyle\sum_{j=1}^{n} \lambda_j Y_{rj} - s_r^+ = Y_{rk} \ (r=1, \ldots, s) \tag{2c}$$

$$\lambda_j, s_i^-, s_r^+ \geq 0 \ (j=1, \ldots, n; i=1, \ldots, m; r=1, \ldots, s) \tag{2d}$$

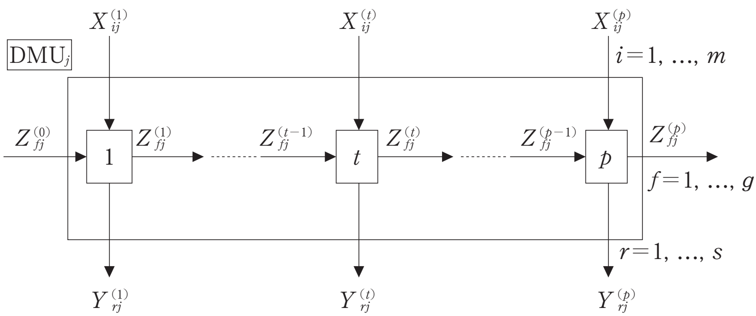
で与えられることがわかる。ここに、θ には符号制約がない。また、s_i^- と s_r^+ は、それぞれインプット i の余剰とアウトプット r の不足を表すスラック変数である。

ところで、図 1 の静態的生産システムを前提に構築されたインプット指向型 CCR モデルでは、クロスセクションデータで表される各事業体のある 1 期間の全体効率性は測定できても、パネルデータで表示されるような相互に関連した複数の期間から成り立つ動態的生産システムの効率性、すなわち、各事業体のシステム全体と期間ごとの 2 つの効率性を同時に評価することはできない。そこで、Kao はこの問題を解決するために、一般の動態的生産システムを、図 2 のように、一連の期間（期間 1 から期間 p まで）が何らか

7）　例えば、Charnes , A., Cooper, W. W.,Lewin, A. Y., Seiford, L.M.（eds.）（1994）, *Data Envelopment Analysis*: *Theory, Methodology, and Applications,* Kluwer Academic Publishers, p. 37 を参照されたい。

のフロー（flows）$Z_{fj}^{(t)}$ によって連結されている直列型の構造をもつシステムとして捉え、このシステムに対して上記 2 つの効率性が同時に整合性を保ちつつ測定できる関係性モデル（relational model）を提唱した。なお、図 2 において、$X_{ij}^{(t)}$ は期間 t における DMU_j の i 番目のインプット要因の値を、$Y_{rj}^{(t)}$ は期間 t における DMU_j の r 番目のアウトプット要因の値を表しており、$X_{ij}=\sum_{t=1}^{p}X_{ij}^{(t)}$, $Y_{rj}=\sum_{t=1}^{p}Y_{rj}^{(t)}$ が成り立つ。また、$Z_{fj}^{(t)}$ は期間 $t+1$ の生産に用いられる期間 t のフローで、例えば、資本金、中間財、繰越し在庫などがそれにあたる。さらに、期間 1 に投入されるフロー $Z_{fj}^{(0)}$ は外生的なインプットの 1 つ、期間 p で産出されるフロー $Z_{fj}^{(p)}$ は最終アウトプットの 1 つと見なすことができる。

図 2．動態的生産システム



さて、Kao に倣って[8]、図 2 で示される動態的生産システムをもつ特定の事業体 DMU_k の効率性 $\mathrm{E}_k^{\mathrm{R}}$ を測定するためのインプット指向型の関係性モデルを定式化すれば、

$$\mathrm{E}_k^{\mathrm{R}}=\mathrm{Max}\ \sum_{r=1}^{s}u_rY_{rk}+\sum_{f=1}^{g}w_fZ_{fk}^{(p)} \qquad (3a)$$

$$\mathrm{s.\,t.}\quad \sum_{i=1}^{m}v_iX_{ik}+\sum_{f=1}^{g}w_fZ_{fk}^{(0)}=1 \qquad (3b)$$

8） Kao は、脚注 4）の論文においてアウトプット指向型のモデルを提示しているが、本稿ではインプット指向型のモデルを示すことにする。

$$(\textstyle\sum_{r=1}^{s}u_rY_{rj}+\sum_{f=1}^{g}w_fZ_{fj}^{(p)})-(\sum_{i=1}^{m}v_iX_{ij}+\sum_{f=1}^{g}w_fZ_{fj}^{(0)})\leq 0 \quad (j=1,\ldots,n) \qquad \text{(3c)}$$

$$(\textstyle\sum_{r=1}^{s}u_rY_{rj}^{(t)}+\sum_{f=1}^{g}w_fZ_{fj}^{(t)}) -(\sum_{i=1}^{m}v_iX_{ij}^{(t)}+\sum_{f=1}^{g}w_fZ_{fj}^{(t-1)})\leq 0 \quad (j=1,\ldots,n;t=1,\ldots,p) \qquad \text{(3d)}$$

$$u_r\geq\varepsilon,\ v_i\geq\varepsilon,\ w_f\geq\varepsilon \quad (r=1,\ldots,s;i=1,\ldots,m;f=1,\ldots,g) \qquad \text{(3e)}$$

となることがわかる。ここに、(3c)はシステム全体に関する制約式、(3d)は期間 t に関する制約式である。また、p 個の期間1から期間 p に関する制約式の総和はシステム全体に関する制約式と等しくなるので、(3c)を上記モデルから削除しても差し支えない。

いま、(3c)を除いて得られた乗数の最適値を u_r^*, v_i^*, w_f^* とすれば、事業体 DMU_k のシステム全体の効率性 E_k^S と期間 t の効率性 $\mathrm{E}_k^{(t)}$ は、それぞれ、(3c)と(3d)を用いて、

$$\mathrm{E}_k^S=(\textstyle\sum_{r=1}^{s}u_r^*Y_{rk}+\sum_{f=1}^{g}w_f^*Z_{fk}^{(p)})/(\sum_{i=1}^{m}v_i^*X_{ik}+\sum_{f=1}^{g}w_f^*Z_{fk}^{(0)}) \qquad \text{(4a)}$$

$$\mathrm{E}_k^{(t)}=(\textstyle\sum_{r=1}^{s}u_r^*Y_{rk}^{(t)}+\sum_{f=1}^{g}w_f^*Z_{fk}^{(t)})/(\sum_{i=1}^{m}v_i^*X_{ik}^{(t)}+\sum_{f=1}^{g}w_f^*Z_{fk}^{(t-1)}) \quad (t=1,\ldots,p) \qquad \text{(4b)}$$

により求めることができる[9)]。また、既述したように事業体 DMU_k に関しては以下の等式、

$$(\textstyle\sum_{r=1}^{s}u_r^*Y_{rk}+\sum_{f=1}^{g}w_f^*Z_{fk}^{(p)})-(\sum_{i=1}^{m}v_i^*X_{ik}+\sum_{f=1}^{g}w_f^*Z_{fk}^{(0)}) =\sum_{t=1}^{p}[(\sum_{r=1}^{s}u_r^*Y_{rk}^{(t)}+\sum_{f=1}^{g}w_f^*Z_{fk}^{(t)})-(\sum_{i=1}^{m}v_i^*X_{ik}^{(t)}+\sum_{f=1}^{g}w_f^*Z_{fk}^{(t-1)})] \qquad \text{(5a)}$$

が成り立つことから、その両辺を、$\sum_{i=1}^{m}v_i^*X_{ik}+\sum_{f=1}^{g}w_f^*Z_{fk}^{(0)}$ で割ることによって、

9) 乗数の最適値 u_r^*, v_i^*, w_f^* が一意に定まらない可能性がある。その場合の対処法については、Kao, 前掲論文、p. 327 か、Kao, C. , Hwang, S-N. (2008), Efficiency decomposition in two-stage data envelopment analysis: An application to non-life insurance companies in Taiwan, *European Journal of Operational Research,* 185, p. 423 を参照されたい。

$$1-E_k^S=\sum_{t=1}^{p}[(1-E_k^{(t)})\{(\sum_{i=1}^{m}v_i^*X_{ik}^{(t)}+\sum_{f=1}^{g}w_f^*Z_{fk}^{(t-1)})$$
$$/(\sum_{i=1}^{m}v_i^*X_{ik}+\sum_{f=1}^{g}w_f^*Z_{fk}^{(0)})\}] \tag{5b}$$

が得られる。したがって、

$$\omega^{(t)}=(\sum_{i=1}^{m}v_i^*X_{ik}^{(t)}+\sum_{f=1}^{g}w_f^*Z_{fk}^{(t-1)})/(\sum_{i=1}^{m}v_i^*X_{ik}+\sum_{f=1}^{g}w_f^*Z_{fk}^{(0)}) \tag{5c}$$

とおけば、(5b)は、$1-E_k^S=\sum_{t=1}^{p}(1-E_k^{(t)})\omega^{(t)}$ と表すことができるので、$(1-E_k^S)$ は $(1-E_k^{(t)})$ の 1 次結合になっていることがわかる。さらに、

$$\sum_{t=1}^{p}\omega^{(t)}=1+\sum_{t=2}^{p}\sum_{f=1}^{g}w_f^*Z_{fk}^{(t-1)}/(\sum_{i=1}^{m}v_i^*X_{ik}+\sum_{f=1}^{g}w_f^*Z_{fk}^{(0)})$$
$$=1+\Delta \tag{5d}$$

から、$\Delta=0$ ならば、システム全体の効率性と期間 t の効率性の間には、

$$1-E_k^S=\sum_{t=1}^{p}(1-E_k^{(t)}) \tag{5e}$$

の関係が成立する。なお、(3c)を除いた乗数形式の関係性モデルの双対形は、表記を単純化するために、(3e)の制約条件の ε を無視して、乗数は非負であると想定すれば、

$$E_k^R=\mathrm{Min}\,\theta \tag{6a}$$

$$\text{s. t. } \sum_{t=1}^{p}\sum_{j=1}^{n}\lambda_j^{(t)}Y_{rj}^{(t)}\geq Y_{rk}\ (r=1,\ \ldots,\ s) \tag{6b}$$

$$\sum_{t=1}^{p}\sum_{j=1}^{n}\lambda_j^{(t)}X_{ij}^{(t)}\leq\theta X_{ik}\ (i=1,\ \ldots,\ m) \tag{6c}$$

$$\sum_{t=1}^{p}\sum_{j=1}^{n}\lambda_j^{(t)}(Z_{fj}^{(t)}-Z_{fj}^{(t-1)})+\theta Z_{fk}^{(0)}\geq Z_{fk}^{(p)}\ (f=1,\ \ldots,\ g) \tag{6d}$$

$$\lambda_j^{(t)}\geq 0\ (j=1,\ \ldots,\ n;\ t=1,\ \ldots,\ p) \tag{6e}$$

$$\theta：\text{符号制約なし} \tag{6f}$$

と表される。

Ⅲ　DSBM モデル

Kao による関係性モデルが比率型モデル（radial model）であるのに対して、本節で取り扱う Tone and Tsutsui の DSBM（dynamic slacks-based measure）モデルは、NSBM（network SBM）モデル[10] を動態的生産システムの効率性

10）Tone, K., Tsutsui, M.（2009）, Network DEA：A slacks-based measure approach, *European Journal of Operational Research,* 197, pp. 243–252.

が分析できるように拡張したもので、非比率・スラック規準型（non-radial, slacks-based measure）モデルである。このモデルでは、連続する 2 つの期間が 4 種類のリンク（links）と呼ばれるキャリー・オーバー（carry-overs）活動によって連結されている。また、インプット値・アウトプット値を同じ比率でなく個別にかつ非比率的に変化させることができる。しかも、目的関数においてインプット項目・アウトプット項目の重要度に見合った重みづけが可能である。さらに、インプット指向型、アウトプット指向型、無指向型の 3 種類のモデルのいずれかを分析目的に応じて選択することができる。

ところで、T 期間（$t=1, \ldots, T$）にわたって活動している各事業体 DMU$_j$（$j=1, \ldots, n$）のある期間 t におけるインプット、アウトプット、リンクが、それぞれ以下のように与えられているものとしよう。

・X_{ijt}（$i=1, \ldots, m$）：m 種類の裁量権のあるインプット

・X_{ijt}^{fix}（$i=1, \ldots, p$）：p 種類の裁量権のないインプット

・Y_{rjt}（$r=1, \ldots, s$）：s 種類の裁量権のあるアウトプット

・Y_{rjt}^{fix}（$r=1, \ldots, q$）：q 種類の裁量権のないアウトプット

・Z_{ijt}^{good}（$i=1, \ldots, ngood; j=1, \ldots, n; t=1, \ldots, T$）：アウトプットとして扱われる望ましいリンク（good link）

・Z_{ijt}^{bad}（$i=1, \ldots, nbad; j=1, \ldots, n; t=1, \ldots, T$）：インプットとして扱われる望ましくないリンク（bad link）

・Z_{ijt}^{free}（$i=1, \ldots, nfree; j=1, \ldots, n; t=1, \ldots, T$）：インプットあるいはアウトプットとして扱われる裁量権のあるリンク

・Z_{ijt}^{fix}（$i=1, \ldots, nfix; j=1, \ldots, n; t=1, \ldots, T$）：インプットあるいはアウトプットとして扱われる裁量権のないリンク

このとき、生産可能集合 $\{X_{it}\}$, $\{X_{it}^{fix}\}$, $\{Y_{rt}\}$, $\{Y_{rt}^{fix}\}$, $\{Z_{it}^{good}\}$, $\{Z_{it}^{bad}\}$, $\{Z_{it}^{free}\}$, $\{Z_{it}^{fix}\}$ は、次のように定義される。

$$X_{it} \geq \sum_{j=1}^{n} X_{ijt} \lambda_j^t \qquad (i=1, \ldots, m; t=1, \ldots, T) \qquad (7a)$$

$$X_{it}^{fix} = \sum_{j=1}^{n} X_{ijt}^{fix} \lambda_j^t \qquad (i=1, \ldots, p; t=1, \ldots, T) \qquad (7b)$$

$$Y_{rt} \leq \sum_{j=1}^{n} Y_{rjt} \lambda_j^t \qquad (r=1, \ldots, s; t=1, \ldots, T) \qquad (7c)$$

$$Y_{rt}^{fix} = \sum_{j=1}^{n} Y_{rjt}^{fix} \lambda_j^t \qquad (r=1, \ldots, q; t=1, \ldots, T) \qquad (7d)$$

$$Z_{it}^{good} \leq \sum_{j=1}^{n} Z_{ijt}^{good} \lambda_j^t \qquad (i=1, \ldots, ngood; t=1, \ldots, T) \qquad (7e)$$

$$Z_{it}^{bad} \geq \sum_{j=1}^{n} Z_{ijt}^{bad} \lambda_j^t \qquad (i=1, \ldots, nbad; t=1, \ldots, T) \qquad (7f)$$

$$Z_{it}^{free}\text{：符号制約なし} \qquad (i=1, \ldots, nfree; t=1, \ldots, T) \qquad (7g)$$

$$Z_{it}^{fix} = \sum_{j=1}^{n} Z_{ijt}^{fix} \lambda_j^t \qquad (i=1, \ldots, nfix; t=1, \ldots, T) \qquad (7h)$$

$$\lambda_j^t \geq 0 \qquad (i=1, \ldots, n; t=1, \ldots, T) \qquad (7i)$$

ここに、(7a), (7b) はインプットに関する制約式、(7c), (7d) はアウトプットに関する制約式、(7e), (7f), (7g), (7h) はリンクに関する制約式である。なお、上記 (7a)～(7h) の右辺の X_{ijt}, X_{ijt}^{fix}, Y_{rjt}, Y_{rjt}^{fix}, Z_{ijt}^{good}, Z_{ijt}^{bad}, Z_{ijt}^{fix} は観測された正のデータであるのに対して、左辺の X_{it}, X_{it}^{fix}, Y_{rt}, Y_{rt}^{fix}, Z_{it}^{good}, Z_{it}^{bad}, Z_{it}^{free}, Z_{it}^{fix} は λ_j^t によって結合されている変数である。

さて、以上の生産可能集合の下で、インプット指向型の DSBM モデルを適用すれば、ある特定の事業体 DMU$_k$ ($k=1, \ldots., n$) の最適な全体効率性 θ_k^* は、

$$\theta_k^* = \text{Min}(1/T) \sum_{t=1}^{T} w^t [1 - \{1/(m+nbad)\} \cdot \{\sum_{i=1}^{m} (w_i^- s_{it}^- / X_{ikt}) + \sum_{i=1}^{nbad} (s_{it}^{bad} / Z_{ikt}^{bad})\}] \qquad (8a)$$

$$\text{s. t. } X_{ikt} = \sum_{j=1}^{n} X_{ijt} \lambda_j^t + s_{it}^- \qquad (i=1, \ldots, m; t=1, \ldots, T) \qquad (8b)$$

$$X_{ikt}^{fix} = \sum_{j=1}^{n} X_{ijt}^{fix} \lambda_j^t \qquad (i=1, \ldots, p; t=1, \ldots, T) \qquad (8c)$$

$$Y_{rkt} = \sum_{j=1}^{n} Y_{rjt} \lambda_j^t - s_{rt}^+ \qquad (r=1, \ldots, s; t=1, \ldots, T) \qquad (8d)$$

$$Y_{rkt}^{fix} = \sum_{j=1}^{n} Y_{rjt}^{fix} \lambda_j^t \qquad (r=1, \ldots, q; t=1, \ldots, T) \qquad (8e)$$

$$Z_{ikt}^{good} = \sum_{j=1}^{n} Z_{ijt}^{good} \lambda_j^t - s_{it}^{good} \qquad (i=1, \ldots, ngood; t=1, \ldots, T) \qquad (8f)$$

$$Z_{ikt}^{bad} = \sum_{j=1}^{n} Z_{ijt}^{bad} \lambda_j^t + s_{it}^{bad} \qquad (i=1, \ldots, nbad; t=1, \ldots, T) \qquad (8g)$$

$$Z_{ikt}^{free} = \sum_{j=1}^{n} Z_{ijt}^{free} \lambda_j^t + s_{it}^{free} \qquad (i=1, \ldots, nfree; t=1, \ldots, T) \qquad (8h)$$

$$Z_{ikt}^{fix}=\sum_{j=1}^{n}Z_{ijt}^{fix}\lambda_j^t \quad (i=1,\ldots,nfix;t=1,\ldots,T) \tag{8i}$$

$$\lambda_j^t\geq 0 \quad (j=1,\ldots,n;t=1,\ldots,T) \tag{8j}$$

$$\sum_{j=1}^{n}Z_{ijt}^{\alpha}\lambda_j^t=\sum_{j=1}^{n}Z_{ijt}^{\alpha}\lambda_j^{t+1}$$
$$(\forall i;t=1,\ldots,T-1;\alpha=good,bad,free,fix) \tag{8k}$$

$$\sum_{t=1}^{T}w^t=T, \qquad \sum_{i=1}^{m}w_i^-=m \tag{8l}$$

$$s_{it}^-\geq 0,\ s_{rt}^+\geq 0,\ s_{it}^{good}\geq 0,\ s_{it}^{bad}\geq 0,\ s_{it}^{free}：\text{符号制約なし}(\forall i,r,t) \tag{8m}$$

と定式化される線形計画問題を解くことにより求められる。ここに、s_{it}^-, s_{rt}^+, s_{it}^{good}, s_{it}^{bad}, s_{it}^{free} は、それぞれ、インプットの余剰、アウトプットの不足、リンクの不足、リンクの余剰、リンクの余剰か不足、を表すスラック変数である。また、w^t は期間 t の重要度（加重値)、w_i^- は i 番目のインプット要因の重要度（加重値）であり、いずれも外生的に与えられる。さらに、(8k)は、動態的モデルにおける期間 t と期間 $t+1$ の間にあるキャリー・オーバー活動の連続性を保証するための重要な制約式である。

いま、上記(8a)～(8m)の最適解を、$\{(\lambda_k^{t*}),(s_{kt}^{-*}),(s_{kt}^{+*}),(s_{kt}^{good*}),(s_{kt}^{bad*}),(s_{kt}^{free*})\}$ で表すことにすると、期間 $t(t=1,\ldots,T)$ の最適な効率性 θ_{kt}^* は、

$$\theta_{kt}^*=1-\{1/(m+nbad)\}\{\sum_{i=1}^{m}(w_i^-s_{ikt}^{-*}/X_{ikt})+\sum_{i=1}^{nbad}(s_{ikt}^{bad*}/Z_{ikt}^{bad})\} \tag{9}$$

を用いて計算することができ、また、(8a)から全体効率性は期間効率性の加重平均であることがわかる。すなわち、

$$\theta_k^*=(1/T)\sum_{t=1}^{T}w^t\theta_{kt}^* \tag{10}$$

さらに、期間効率性と全体効率性について以下のことがいえる。① (8a)のすべての最適解が $\theta_{kt}^*=1$ を満たしているならば、DMU_k は期間 t において期間効率的である。また、そのとき、$s_{ikt}^{-*}=0(\forall i)$, $s_{ikt}^{bad*}=0(\forall i)$ が成立する。②$\theta_k^*=1$ ならば DMU_k は全体効率的である。そして、$s_{ikt}^{-*}=0(\forall i,t)$, $s_{ikt}^{bad*}=0(\forall i,t)$ が成り立つ[11]。③したがって、DMU_k は、すべての期間について期間効率的である場合に限ってのみ全体効率的であるといえる。④2つ

11）全体効率性と期間効率性の取り得る範囲は、$0\leq\theta_k^*\leq 1$, $0\leq\theta_{kt}^*\leq 1$ である。

の事業体 DMU_a と DMU_b の期間効率性が $\theta_{at}^* \geq \theta_{bt}^* (\forall t)$ を満たすならば、全体効率性についても $\theta_a^* \geq \theta_b^*$ の関係が得られる。また、$\theta_{a\bar{t}}^* > \theta_{b\bar{t}}^*$ となるような期間 $\bar{t}$ が存在するならば $\theta_a^* > \theta_b^*$ が成り立つ。⑤全体効率性 θ_k^* は目的関数(8a)の最適解として一意的に決定されるけれども、期間効率性 θ_{kt}^* は一意に定まらず、s_{ikt}^{-*} と s_{ikt}^{bad*} の両方またはどちらかが複数の最適解をもつ可能性があることに留意しておく必要がある[12)]。

次に、アウトプット指向型の DSBM モデルを取りあげてみることにする。

いま、このモデルの最適な全体効率性を τ_k^* で表すことにすれば、それは、以下の線形計画問題を解くことにより求められる。

$$1/\tau_k^* = \mathrm{Max}(1/T)\sum_{t=1}^{T} w^t [1 + \{1/(s + ngood)\} \cdot \{\sum_{r=1}^{s}(w_r^+ s_{rt}^+ / Y_{rkt}) + \sum_{i=1}^{ngood}(s_{it}^{good} / Z_{ikt}^{good})\}] \tag{11}$$

$$\text{s.t.} \quad (8\mathrm{b}) \sim (8\mathrm{m})$$

但し、ここでは制約条件(8l)の $\sum_{i=1}^{m} w_i^- = m$ が $\sum_{r=1}^{s} w_r^+ = s$ に置き換えられている。なお、w_r^+ は外部から与えられる r 番目のアウトプット要因の重要度（加重値）である。

さて、上記モデルの最適解をインプット指向型 DSBM モデルの場合と同様に $\{(\lambda_k^{t*}), (s_{kt}^{-*}), (s_{kt}^{+*}), (s_{kt}^{good*}), (s_{kt}^{bad*}), (s_{kt}^{free*})\}$ と表し、最適な期間効率性 τ_{kt}^* を、

$$\tau_{kt}^* = 1/[1 + \{1/(s + ngood)\}\{\sum_{r=1}^{s}(w_r^+ s_{rkt}^{+*} / Y_{rkt}) + \sum_{i=1}^{ngood}(s_{ikt}^{good*} / Z_{ikt}^{good})\}] \tag{12}$$

と定義すれば、全体効率性 τ_k^* は期間効率性 τ_{kt}^* の加重調和平均になっていることがわかる。すなわち、

$$1/\tau_k^* = (1/T)\sum_{t=1}^{T} w^t / \tau_{kt}^* \tag{13}$$

また、期間効率性と全体効率性について以下のことがいえる。① (11)のすべての最適解が $\tau_{kt}^* = 1$ を満たしているならば、DMU_k は期間 t において期

12）その際、期間効率値の取り得る範囲を確定するために、全体の最適値 θ_k^* を維持しながら、$\mathrm{Max}\,\theta_{kt}$ と $\mathrm{Min}\,\theta_{kt}$ を解くことが提案されている。

間効率的であり、そのときには、$s^{+*}_{rkt}=0(\forall r)$, $s^{good*}_{ikt}=0(\forall i)$ が成り立つ。② $\tau^*_k=1$ ならば DMU_k は全体効率的であり、$s^{+*}_{rkt}=0(\forall r, t)$, $s^{good*}_{ikt}=0(\forall i, t)$ となる。③ それ故、DMU_k は、すべての期間について期間効率的である場合に限ってのみ全体効率的である。④ 2つの事業体 DMU_a と DMU_b の期間効率性が $\tau^*_{at}\geq\tau^*_{bt}(\forall t)$ を満たすならば、全体効率性についても $\tau^*_a\geq\tau^*_b$ の関係が得られる。さらに、$\tau^*_{a\bar{t}}>\tau^*_{b\bar{t}}$ となるような期間 $\bar{t}$ が存在するならば $\tau^*_a>\tau^*_b$ が成り立つ。⑤ 全体効率性 τ^*_k は目的関数(11)の最適解として一意的に決定されるけれども、期間効率性 τ^*_{kt} は複数の最適解をもつ可能性がある[13]。

最後に、無指向型 DSBM モデルについて触れておくことにする。このモデルは、既述のインプット指向型とアウトプット指向型のモデルを結合することで得られる。それ故、最適なシステム全体の効率性 ρ^*_k は(8b)～(8m)に $\sum_{r=1}^{s}w^+_r=s$ を加えた制約条件の下で、

$$\rho^*_k=\mathrm{Min}\langle(1/T)\textstyle\sum_{t=1}^{T}w^t[1-\{1/(m+nbad)\}\{\sum_{i=1}^{m}(w^-_i s^-_{it}/X_{ikt})+\sum_{i=1}^{nbad}(s^{bad}_{it}/Z^{bad}_{ikt})\}]\rangle\cdot\langle(1/T)\sum_{t=1}^{T}w^t[1+\{1/(s+ngood)\}\cdot\{\sum_{r=1}^{s}(w^+_r s^+_{rt}/Y_{rkt})+\sum_{i=1}^{ngood}(s^{good}_{it}/Z^{good}_{ikt})\}]\rangle^{-1} \tag{14}$$

を解くことによって求められる。また、その最適解を、$\{(\lambda^{t*}_k), (s^{-*}_{kt}), (s^{+*}_{kt}), (s^{good*}_{kt}), (s^{bad*}_{kt}), (s^{free*}_{kt})\}$ とおけば、最適な期間 t の効率性 ρ^*_{kt} は、

$$\rho^*_{kt}=[1-\{1/(m+nbad)\}\{\textstyle\sum_{i=1}^{m}(w^-_i s^{-*}_{ikt}/X_{ikt})+\sum_{i=1}^{nbad}(s^{bad*}_{ikt}/Z^{bad}_{ikt})\}]\cdot[1+\{1/(s+ngood)\}\{\sum_{r=1}^{s}(w^+_r s^{+*}_{rkt}/Y_{rkt})+\sum_{i=1}^{ngood}(s^{good*}_{ikt}/Z^{good}_{ikt})\}]^{-1} \tag{15}$$

により定義できる。さらに、このモデルの期間効率性と全体効率性については、インプット指向型とアウトプット指向型のモデルと同様に以下のことがいえる。① (14)のすべての最適解が $\rho^*_{kt}=1$ を満たすならば、DMU_k は期間 t において期間効率的であり、$s^{-*}_{ikt}=0(\forall i)$, $s^{bad*}_{ikt}=0(\forall i)$, $s^{+*}_{rkt}=0(\forall r)$,

13) その対処法として、全体の最適値 τ^*_k を維持しながら、$\mathrm{Max}\,\tau_{kt}$ と $\mathrm{Min}\,\tau_{kt}$ を解くことによって、期間効率値の変動範囲を定めることが提案されている。

$s_{ikt}^{good*}=0(\forall i)$ が成り立つ。② $\rho_k^*=1$ ならば DMU_k は全体効率的であり、$s_{ikt}^{-*}=0(\forall i,t)$, $s_{ikt}^{bad*}=0(\forall i,t)$, $s_{rkt}^{+*}=0(\forall r,t)$, $s_{ikt}^{good*}=0(\forall i,t)$ が成立する。その結果、$\rho_{kt}^*=1(\forall t)$ となる。③ したがって、DMU_k は、すべての期間について期間効率的である場合に限ってのみ全体効率的である。④ 2つの事業体 DMU_a と DMU_b の期間効率性が $\rho_{at}^*\geq\rho_{bt}^*(\forall t)$ を満たし、しかも、

$$1-\{1/(m+nbad)\}\{\textstyle\sum_{i=1}^{m}(w_i^- s_{iat}^{-*}/X_{iat})+\sum_{i=1}^{nbad}(s_{iat}^{bad*}/Z_{iat}^{bad})\}$$
$$\geq 1-\{1/(m+nbad)\}\{\textstyle\sum_{i=1}^{m}(w_i^- s_{ibt}^{-*}/X_{ibt})+\sum_{i=1}^{nbad}(s_{ibt}^{bad*}/Z_{ibt}^{bad})\}$$
$$(t=1,\ldots,T) \qquad (16)$$
$$1+\{1/(s+ngood)\}\{\textstyle\sum_{r=1}^{s}(w_r^+ s_{rat}^{+*}/Y_{rat})+\sum_{i=1}^{ngood}(s_{iat}^{good*}/Z_{iat}^{good})\}$$
$$\leq 1+\{1/(s+ngood)\}\{\textstyle\sum_{r=1}^{s}(w_r^+ s_{rbt}^{+*}/Y_{rbt})+\sum_{i=1}^{ngood}(s_{ibt}^{good*}/Z_{ibt}^{good})\}$$
$$(t=1,\ldots,T) \qquad (17)$$

であるとき、$\rho_a^*\geq\rho_b^*$ となる。また、$\rho_{a\bar{t}}^*>\rho_{b\bar{t}}^*$ となるような期間 $\bar{t}$ が存在するならば $\rho_a^*>\rho_b^*$ が成り立つ。⑤全体効率性は分数計画問題を解くことにより一意的に決定できるが、期間効率性は複数の解をもつ可能性がある。その対応方法の基本的な考え方は、インプット指向型やアウトプット指向型の場合と同じである。

ところで、無指向型 DSBM モデルは分数計画問題として定式化されているので、その解を効果的に求めるためにはそれを線形計画問題に変換する必要がある。そのために、正のスカラー変数 h を導入し、Charnes-Cooper 変換を用いれば[14)]、無指向型 DSBM モデルと同値の以下のような計画問題が得られる。

$$\delta=\mathrm{Min}(1/T)\textstyle\sum_{t=1}^{T}w^t[h-\{1/(m+nbad)\}\{\sum_{i=1}^{m}(w_i^- hs_{it}^-/X_{ikt})$$
$$+\textstyle\sum_{i=1}^{nbad}(hs_{it}^{bad}/Z_{ikt}^{bad})\}] \qquad (18a)$$
$$\text{s.t.}\quad (1/T)\textstyle\sum_{t=1}^{T}w^t[h+\{1/(s+ngood)\}\{\sum_{r=1}^{s}(w_r^+ hs_{rt}^+/Y_{rkt})$$
$$+\textstyle\sum_{i=1}^{ngood}(hs_{it}^{good}/Z_{ikt}^{good})\}]=1 \qquad (18b)$$

14） Charnes-Cooper 変換については、例えば、Cooper, W.W., Seiford, L. M., Tone, K. (eds.)（2007）, *Data Envelopment Analysis: A Comprehensive Text with Models, Applications, References and DEA-Solver Software,* 2^{nd} ed., Springer, pp. 71–73 を参照されたい。

$$(8b)\sim(8m),\ \sum_{r=1}^{s} w_r^+ = s$$

そして、上記モデルの各変数に対して、 $hs_{it}^- = S_{it}^-$, $hs_{rt}^+ = S_{rt}^+$, $hs_{it}^{bad} = S_{it}^{bad}$, $hs_{it}^{good} = S_{it}^{good}$, $hs_{it}^{free} = S_{it}^{free}$, $h\lambda_j^t = \Lambda_j^t$, $h\lambda_j^{t+1} = \Lambda_j^{t+1}$ と定義することにより、元の分数計画問題は、次の線形計画問題、

$$\delta = \mathrm{Min}(1/T)\sum_{t=1}^{T} w^t [h - \{1/(m+nbad)\}\{\sum_{i=1}^{m}(w_i^- S_{it}^- / X_{ikt}) + \sum_{i=1}^{nbad}(S_{it}^{bad}/Z_{ikt}^{bad})\}] \qquad (19a)$$

s.t.

$$(1/T)\sum_{t=1}^{T} w^t [h + \{1/(s+ngood)\}\{\sum_{r=1}^{s}(w_r^+ S_{rt}^+ / Y_{rkt}) + \sum_{i=1}^{ngood}(S_{it}^{good}/Z_{ikt}^{good})\}] = 1 \qquad (19b)$$

$$hX_{ikt} = \sum_{j=1}^{n} X_{ijt}\Lambda_j^t + S_{it}^- \quad (i=1, ..., m;\ t=1, ..., T) \qquad (19c)$$

$$hX_{ikt}^{fix} = \sum_{j=1}^{n} X_{ijt}^{fix}\Lambda_j^t \quad (i=1, ..., p;\ t=1, ..., T) \qquad (19d)$$

$$hY_{rkt} = \sum_{j=1}^{n} Y_{rjt}\Lambda_j^t - S_{rt}^+ \quad (r=1, ..., s;\ t=1, ..., T) \qquad (19e)$$

$$hY_{rkt}^{fix} = \sum_{j=1}^{n} Y_{rjt}^{fix}\Lambda_j^t \quad (r=1, ..., q;\ t=1, ..., T) \qquad (19f)$$

$$hZ_{ikt}^{good} = \sum_{j=1}^{n} Z_{ijt}^{good}\Lambda_j^t - S_{it}^{good} \quad (i=1, ..., ngood;\ t=1, ..., T) \qquad (19g)$$

$$hZ_{ikt}^{bad} = \sum_{j=1}^{n} Z_{ijt}^{bad}\Lambda_j^t + S_{it}^{bad} \quad (i=1, ..., nbad;\ t=1, ..., T) \qquad (19h)$$

$$hZ_{ikt}^{free} = \sum_{j=1}^{n} Z_{ijt}^{free}\Lambda_j^t + S_{it}^{free} \quad (i=1, ..., nfree;\ t=1, ..., T) \qquad (19i)$$

$$hZ_{ikt}^{fix} = \sum_{j=1}^{n} Z_{ijt}^{fix}\Lambda_j^t \quad (i=1, ..., nfix;\ t=1, ..., T) \qquad (19j)$$

$$\Lambda_j^t \geq 0 \quad (j=1, ..., n;\ t=1, ..., T) \qquad (19k)$$

$$\sum_{j=1}^{n} Z_{ijt}^{\alpha}\Lambda_j^t = \sum_{j=1}^{n} Z_{ijt}^{\alpha}\Lambda_j^{t+1} \quad (\forall i;\ t=1, ..., T-1;\ \alpha = good, bad, free, fix) \qquad (19l)$$

$$\sum_{t=1}^{T} w^t = T,\ \sum_{i=1}^{m} w_i^- = m,\ \sum_{r=1}^{s} w_r^+ = s \qquad (19m)$$

$S_{it}^- \geq 0$, $S_{rt}^+ \geq 0$, $S_{it}^{good} \geq 0$, $S_{it}^{bad} \geq 0$, S_{it}^{free}: 符号制約なし $(\forall i, r, t)$, $h > 0$ (19n)

に定式化し直すことができる。

Ⅳ 結

以上、Kao の比率型 (radial) 関係性モデルと Tone and Tsutsui の非比率

型（non-radial）DSBM モデルについて概説してきたが、両者を比較して、①インプット値・アウトプット値を個別にかつ非比率的に変化させることができる、②インプット項目・アウトプット項目の重要度に見合った重みづけが可能である、③分析目的に応じてインプット指向型、アウトプット指向型、無指向型の 3 種類のモデルのいずれかを選択することができる、など分析者の裁量に委ねられる部分を多くもつ DSBM モデルの方が関係性モデルよりも適用範囲は広く実用的であるように思われる。ただ、どちらのモデルが事業体の効率性をより厳密に識別することができるかといった点については、数多くの現実データを用いた分析を行う必要がある。また、今後、動態的 DEA モデルをウィンドウ分析（window analysis）やマルムクィスト生産性指数（Malmquist productivity index）など他の手法と比較することも考えられる。それらが今後に残された課題である。

（筆者は関西学院大学商学部教授）

主要参考文献

［1］ Aghayi, N., Gholami, K., Beigi, Z. G., Lotfi, F. H. (2014), Measuring performance of dynamic and network structures by SBM model, In: Osman, I. H., Anouze, A. L., Emrouznejad, A. (eds.), *Handbook of Research on Strategic Performance Management and Measurement Using Data Envelopment Analysis,* IGI, pp. 527–558.

［2］ Charnes, A., Cooper, W. W., Lewin, A. Y., Seiford, L. M. (eds.) (1994), *Data Envelopment Analysis: Theory, Methodology, and Applications,* Kluwer Academic Publishers.

［3］ Cooper, W. W., Seiford, L. M., Tone, K. (eds.) (2007), *Data Envelopment Analysis: A Comprehensive Text with Models, Applications, References and DEA-Solver Software,* 2nd ed., Springer.

［4］ Färe, R., Grosskopf, S. (1996), *Intertemporal Production Frontiers: With Dynamic DEA,* Kluwer Academic Publishers.

［5］ Färe, R., Grosskopf, S.(2000),Network DEA, *Socio-Economic Planning Sciences,* 34, pp. 35–49.

［6］ Färe, R., Grosskopf, S., Whittaker, G. (2007), Network DEA, In: Zhu, J., Cook, W. D. (eds.), *Modeling Data Irregularities and Structural Complexities in Data Envelopment Analysis,* Springer, pp. 209–240.

［7］ Kao, C. (2009), Efficiency decomposition in network data envelopment analysis: A relational model, *European Journal of Operational Research,* 192, pp. 949-962.

[8] Kao, C. (2013), Dynamic data envelopment analysis: A relational analysis, *European Journal of Operational Research,* 227, pp. 325-330.

[9] Kao, C., Hwang, S-N. (2008), Efficiency decomposition in two-stage data envelopment analysis: An application to non-life insurance companies in Taiwan, *European Journal of Operational Research,* 185, pp. 418-429.

[10] Reshadi, M., Espahi, A.B. (2012), Dynamic DEA: Relative efficiency measure of units, *Applied Mathematical Sciences,* 6, pp. 2719-2725.

[11] Shafiee, M., Sangi, M., Ghaderi, M. (2013), Bank performance evaluation using dynamic DEA: A slacks-based measure approach, *Journal of Data Envelopment Analysis and Decision Science,* 2013, pp. 1-12.

[12] Tone, K. (2001), A slacks-based measure of efficiency in data envelopment analysis, *European Journal of Operational Research,* 130, pp. 498-509.

[13] Tone, K. (2011), Slacks-based measure of efficiency, In: Cooper, W. W., Seiford, L. M., Zhu, J. (eds.), *Handbook on Data Envelopment Analysis,* 2nd ed., Springer, pp. 195-209.

[14] Tone, K., Tsutsui, M. (2009), Network DEA: A slacks-based measure approach, *European Journal of Operational Research,* 197, pp. 243-252.

[15] Tone, K., Tsutsui, M. (2010), Dynamic DEA: A slacks-based measure approach, *Omega,* 38, pp. 145-156.